Nom :

Prénom :

Classe :

Professeur : M.Lacouture

<u>L'adresse de mon site sur lequel tu trouveras toutes les vidéos</u> :

https://www.mathsetvideos.com/

<u>Pour me contacter en dehors des cours</u> :

lacouture.brive@gmail.com ou par l'intermédiaire de mon site

Sommaire

NOMBRES RELATIFS : Savoir calculer la somme de deux nombres relatifs

Méthode :

« Nombres relatifs » n°4

Pour ajouter deux nombres relatifs :

- Si les nombres ont le même signe, on garde ce signe et on ajoute leurs distances à zéro.
- Si les nombres n'ont pas le même signe, on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro et on soustrait leurs distances à zéro.

- $(-10) + (-14) = -24$ signe négatif car on garde le signe commun et $10 + 14 = 24$
- $(-2) + (-25) = -27$ signe négatif car on garde le signe commun et $2 + 25 = 27$

- $-20 + 13 = -7$ signe négatif car $20 > 7$ et $20 - 13 = 7$
- $-20 + 37 = 17$ signe positif car $37 > 20$ et $37 - 20 = 17$

NOMBRES RELATIFS : Savoir calculer la différence de deux nombres relatifs

Propriété :

« Nombres relatifs » n°5

Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

- $25 - (\mathbf{-8}) = 25 + (\mathbf{+8}) = 33$

On veut soustraire le nombre -8 : on peut donc ajouter son opposé, c'est-à-dire +8.

- $17 - \mathbf{25} = 17 + (\mathbf{-25}) = -8$

On veut soustraire le nombre 25 : on peut donc ajouter son opposé, c'est-à-dire -25.

- $-11 - \mathbf{14} = -11 + (\mathbf{-14}) = -25$

On veut soustraire le nombre 14 : on peut donc ajouter son opposé, c'est-à-dire -14.

Méthode :

« Nombres relatifs » n°6

Pour calculer le produit de 2 nombres relatifs :

- On calcule le produit de leurs distances à zéro.
- On utilise la règle de signes suivante :

  - Le produit de deux nombres de même signe est positif.
  - Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

- $9 \times (-7) = -63$ *Les nombres n'ont pas le même signe, donc produit négatif.*
- $(-8) \times (-6) = +48$ *Les nombres ont le même signe, donc produit positif.*
- $(-10)^2 = (-10) \times (-10) = 100$
- $-10^2 = -10 \times 10 = -100$

Méthode :

« Nombres relatifs » n°7

Pour calculer le produit de plusieurs nombres relatifs :

- On calcule le produit de leurs distances à zéro.
- On utilise la règle des signes étendue suivante :

  - Le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif.
  - Le produit d'un nombre impair de facteurs négatifs est négatif.

- $(-3) \times (-2) \times 5 \times (-2) = -3 \times 2 \times 5 \times 2 = -60$ car il y a 3 facteurs négatifs
- $(-2) \times (-5) \times (-10) \times (-2) = +2 \times 5 \times 10 \times 2 = +200$ car il y a 4 facteurs négatifs

NOMBRES RELATIFS : Savoir calculer le quotient de deux nombres relatifs

« Nombres relatifs » n°8

Méthode :

Pour calculer un quotient de nombres relatifs :

- On calcule le quotient de leurs distances à zéro.
- On utilise la même règle des signes que pour les produits.

Propriété :

- Le quotient de deux nombres de même signe est positif
- Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

- $(-8) \div (-2) = +4$ car il y a 2 nombres négatifs dans le calcul et que $8 \div 2 = 4$
- $36 \div (-6) = -6$ car il n'y a qu'un nombre négatif dans le calcul et que $36 \div 6 = 6$
- $\frac{-72}{9} = -8$ car il n'y a qu'un seul nombre négatif dans le calcul et que $72 \div 9 = 8$.

NOMBRES RELATIFS : Savoir effectuer des calculs enchaînés

Propriété :

Lorsque plusieurs calculs sont enchaînés, ils doivent être effectués dans l'ordre des priorités suivantes :

1) Les calculs entre parenthèses.
2) Les multiplications et les divisions.
3) Les additions et les soustractions de gauche à droite.

« Nombres relatifs » n°1

- $3 + 7 \times (-6 - 4) =$

  $3 + 7 \times (-10) =$

  $3 + (-70) =$

  -67

- $-7 + 20 \div (-5) - 9 + 1 =$

  $-7 + (-4) - 9 + 1 =$

  $-11 - 9 + 1 =$

  $-20 + 1 =$

  -19

Définition :

« Puissances » n°1

n représente un nombre entier positif supérieur ou égal à 2.

- 10^n est une notation qui représente le produit de n facteurs égaux à 10.
- $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10}$
- On dit que 10^n est la puissance de 10 d'exposant n.

- $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$. C'est la puissance de 10 d'exposant 4.
- $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$. C'est la puissance de 10 d'exposant 6.

Un exposant positif représente donc une succession de multiplications par 10.

PUISSANCES de 10 : Les préfixes des grands nombres

Les préfixes désignant les grands nombres

« Puissances » n°3

Préfixe	**GIGA**	**MEGA**	**KILO**	**HECTO**	**DECA**	**UNITE**
Notation	G	M	k	h	da	
Signifie…	10^9	10^6	10^3	10^2	10	1

Autrement dit, « kilo » signifie « mille fois », « Mega » signifie « un million de fois » et « Giga » signifie « un milliard de fois ».

- Exemple avec les unités de longueurs :
  3 km c'est « trois fois mille mètres », donc 3 000m.
  3Mm c'est « trois fois un million de mètres », donc 3 000 000m
  3Gm c'est « trois fois un milliard de mètres », donc 3 000 000 000m.

Gm			Mm			km	hm	dam	m

- 8 Gm= 8 000 Mm
- 4 000km=4 Mm

Définition :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^{-1} = \frac{1}{10}$

Définition :

« Puissances » n°5

n représente un nombre entier positif supérieur ou égal à 2.

- 10^{-n} est une notation qui représente l'inverse de 10^n.
- On a donc $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10}}$.

- $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}000\,1$
- $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$

Un exposant négatif représente donc une succession de divisions par 10.

PUISSANCES de 10 : Les préfixes des petits nombres

Les préfixes désignant les petits nombres

« Puissances » n°7

Préfixe	UNITE	DECI	CENTI	MILLI	MICRO	NANO
Notation		dc	c	m	μ	n
Signifie…	$10^0 = 1$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Autrement dit, « milli » signifie « millième », « micro » signifie « millionième » et « nano » signifie « milliardième ».

- Exemple avec les unités de longueurs :
  3mm c'est « trois millièmes de mètres », donc 0,003m.
  3μm c'est « trois millionièmes de mètres », donc 0,000 003m.
  3nm c'est « trois milliardièmes de mètres », donc 0,000 000 003m.

m	dm	cm	mm			μm			nm

- 17 μm = 17 000 nm
- 4 000 μm =4 mm

PUISSANCES de 10 : Écriture scientifique d'un grand nombre

<u>Définition</u> :

- L'écriture scientifique d'un nombre positif est le produit d'un nombre compris entre 1 et 10 (10 exclu) par une puissance de 10.
- Cette écriture est unique.

« Puissances » n°2

- ➢ L'écriture scientifique de 15 000 000 000 est donc $1{,}5 \times 10^{10}$.
- ➢ L'écriture scientifique de 521 000 est $5{,}21 \times 10^{5}$.
- ➢ L'écriture scientifique de 2 145,8 est $2{,}1458 \times 10^{3}$.

Nombres compris entre 1 et 10

<u>Définition</u> :

De la même façon, l'écriture scientifique d'un nombre négatif est donc le produit d'un nombre compris entre -10 (exclu) et -1 par une puissance de 10.

- ➢ L'écriture scientifique de $-63\,000\,000$ est $-6{,}3 \times 10^{5}$.

Nombre compris entre -10 *et* -1

PUISSANCES de 10 : Écriture scientifique d'un « petit » nombre

- L'écriture scientifique d'un nombre positif est le produit d'un nombre compris entre 1 et 10 (10 exclu) par une puissance de 10.
- Pour l'écriture scientifique des nombres compris strictement entre -1 et 1, on utilise une puissance de 10 d'exposant négatif.

« Puissances » n°6

- ➢ $0{,}000\,002\,8 = 2{,}8 \times 10^{-6}$
- ➢ $0{,}000\,000\,5 = 5 \times 10^{-7}$

Nombres compris entre 1 et 10

PUISSANCES DE 10 : Quelques simplifications possibles

Il est parfois possible de simplifier une expression écrite à l'aide de puissances de 10.

- <u>Quand on multiplie des puissances de 10</u> :

$$10^4 \times 10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{4 facteurs égaux à 10}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\text{3 facteurs égaux à 10}} = 10^{4+3} = 10^7$$

7 facteurs égaux à 10 au total

- <u>Quand on divise des puissances de 10</u> :

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times 10 \times 10}{\cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times \cancel{10}} = 10^{6-4} = 10^2$$

On peut simplifier par 10 à 4 reprises.
Il reste 2 facteurs égaux à 10.

- <u>Quand on exprime la puissance d'une puissance de 10</u> :

$$(10^2)^4 = \underbrace{10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2}_{\text{4 facteurs égaux à } 10^2} = \underbrace{(10 \times 10) \times (10 \times 10) \times (10 \times 10) \times (10 \times 10)}_{\text{4 facteurs égaux à } 10 \times 10} = 10^8$$

8 facteurs égaux
à 5 au total

PUISSANCES DE 10 : Comparer des nombres écrits avec des puissances de 10

<u>Méthode</u> :

« Puissances » n°4

Pour comparer des nombres écrits avec des puissances de 10 simplement, on peut :

- Donner l'écriture scientifique de chacun.
- Comparer alors les exposants des puissances de 10 : plus l'exposant est grand, plus le nombre est grand.
- S'ils sont identiques, on compare les nombres décimaux qui précèdent les puissances de 10.

- Quel est le plus grand nombre entre 99×10^3 ; $24{,}5 \times 10^6$ *et* $7{,}2 \times 10^4$?

On donne d'abord l'écriture scientifique de chacun de façon à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres avant leur virgule.

- $99 \times 10^3 = 9{,}9 \times 10^1 \times 10^3 = 9{,}9 \times 10^4$
- $24{,}5 \times 10^6 = 2{,}45 \times 10^1 \times 10^6 = 2{,}45 \times 10^7$
- $7{,}2 \times 10^4$ est déjà une écriture scientifique.

Le plus grand est celui dont l'exposant est le plus grand : c'est $2{,}45 \times 10^7$.
Les deux autres possèdent le même exposant : on compare donc 9,9 et 7,2.
Le plus grand des deux est donc $9{,}9 \times 10^4$.

Donc $2{,}45 \times 10^7 > 9{,}9 \times 10^4 > 7{,}2 \times 10^4$.

Méthode :

- Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire, il faut qu'ils aient le même dénominateur.
- On ajoute (ou on soustrait) alors les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

« Calcul fractionnaire » n°4

- $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}$
- $\frac{-2}{5}-\frac{4}{5}=\frac{-2-4}{5}=\frac{-6}{5}$
- $2-\frac{3}{4}=\frac{8}{4}-\frac{3}{4}=\frac{8-3}{4}=\frac{5}{4}$

Propriété :

Un nombre en écriture fractionnaire ne change pas quand on multiplie (ou on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

« Calcul fractionnaire » n°5

Cette propriété peut servir à obtenir le même dénominateur pour additionner des fractions.

- $\frac{-5}{21}+\frac{9}{7}=\frac{-5}{21}+\frac{9\times 3}{7\times 3}=\frac{-5}{21}+\frac{27}{21}=\frac{-5+27}{21}=\frac{22}{21}$
- $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}-\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}-\frac{9}{12}=\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{12}$

Cette propriété peut aussi servir à rendre une fraction irréductible, c'est-à-dire à la simplifier au maximum.

- $\frac{55}{45}=\frac{\cancel{5}\times 11}{\cancel{5}\times 9}=\frac{11}{9}$

<u>Méthode</u> :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

« Calcul fractionnaire » n°6

- $\frac{-5}{7} \times \frac{3}{-4} = \frac{-5 \times 3}{7 \times (-4)} = \frac{-15}{-28} = \frac{15}{28}$

- Il peut être habile de simplifier <u>avant</u> de calculer :

$$\frac{35}{-56} \times \frac{-64}{-49} = -\frac{5 \times \cancel{7} \times 8 \times \cancel{8}}{\cancel{7} \times \cancel{8} \times 7 \times 7} = -\frac{5 \times 8}{7 \times 7} = -\frac{40}{49}$$

Résultat négatif car il y a un nombre impair de facteurs négatifs

<u>Méthode</u> :

Pour prendre une fraction d'une quantité, il suffit de multiplier la fraction par la quantité.

- Les $\frac{2}{3}$ de 60 élèves --> $\frac{2}{3} \times 60 = \frac{2 \times 60}{3 \times 1} = \frac{2 \times \cancel{3} \times 20}{\cancel{3} \times 1} = 40$ élèves

- Les $\frac{3}{4}$ de la moitié de 320 Go --> $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 320 = \frac{3 \times 1 \times 320}{4 \times 2 \times 1} = \frac{3 \times 1 \times \cancel{4} \times \cancel{2} \times 40}{\cancel{4} \times \cancel{2} \times 1} = 120$Go

Définition :

- On dit que deux nombres sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.
- En particulier, si a et b sont des nombres non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ *est* $\frac{b}{a}$ *car* $\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = 1$.

« Calcul fractionnaire » n°7

➢ L'inverse de $\frac{1}{4}$ est 4 car $\frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4} = 1$

➢ L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$ car $\cancel{7} \times \frac{1}{\cancel{7}} = 1$.

➢ L'inverse de $\frac{-3}{4}$ est $\frac{4}{-3}$ car $\frac{\cancel{-3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{-3}} = 1$

Propriété :

Le nombre zéro est le seul à ne pas avoir d'inverse.

➢ Le produit de zéro par un nombre donnera toujours zéro, et donc jamais 1.

Propriété :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

« Calcul fractionnaire » n°8

➢ $\frac{4}{5} \div \frac{\mathbf{-8}}{\mathbf{15}} = \frac{4}{5} \times \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{-8}} = -\frac{4 \times 5 \times 3}{5 \times 2 \times 4} = -\frac{3}{2}$

On veut diviser par $\frac{-8}{15}$, on multiplie donc par son inverse, c'est-à-dire $\frac{15}{-8}$.

➢ $\frac{9}{10} \div (\mathbf{-12}) = \frac{9}{10} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-12}} = \frac{3 \times 3 \times 1}{10 \times 3 \times (-4)} = \frac{3}{-40} = \frac{-3}{40}$ On évite le signe $-$ au dénominateur

On veut diviser par -12, on multiplie donc par son inverse, c'est-à-dire $\frac{1}{-12}$.

Définition :

« Divisibilité des nombres » n°4

On dit qu'un nombre est un nombre premier s'il possède exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

- 17 est un nombre premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 17.
- 14 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs sont 1 ; 14 mais aussi 2 et 7.
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
- 2 est un nombre premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 2.

Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, et 97

Méthode pour vérifier si un nombre est premier ou non :

Pour vérifier si un nombre est premier ou non, on vérifie s'il est divisible par un des nombres premiers de la liste, en commençant par 2.

On vérifie les nombres premiers un par un, jusqu'à la racine carrée du nombre à tester.

Si on ne trouve aucun diviseur, alors le nombre est premier.

- 621 est dans la table de 3 (car 6+2+1=9) : ce n'est pas un nombre premier
- 221 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5 (critères de divisibilité). On vérifie 7, puis 11, puis 13. Il est divisible par 13. Ce n'est pas un nombre premier.
- 257 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5 (critères de divisibilité). On vérifie 7, puis 11, puis 13. Inutile d'aller plus loin car $\sqrt{257} \approx 16$. Aucun n'est diviseur. Donc 257 est premier.

Méthode : Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Décomposition de 48 en produit de facteurs premiers :

On décompose 48.	$48 = 2 \times 24$	2 est un nombre premier mais pas 24.
On décompose donc 24.	$48 = 2 \times 3 \times 8$	2 et 3 sont premiers mais pas 8.
On décompose donc 8.	$48 = 2 \times 3 \times 2 \times 4$	2 et 3 sont premiers mais pas 4.
On décompose donc 4.	$48 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$	Tous ces facteurs sont premiers.

Décomposition de 60 en produit de facteurs premiers :

On décompose 60.	$60 = 6 \times 10$	6 et 10 ne sont pas premiers.
On décompose donc 6 et 10.	$60 = 2 \times 3 \times 5 \times 2$	Tous ces facteurs sont premiers.

Cela peut servir, par exemple, à simplifier une fraction :

$$\frac{48}{60} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{2}} = \frac{4}{5}$$

« Divisibilité des nombres » n°5

Propriété de Thalès :

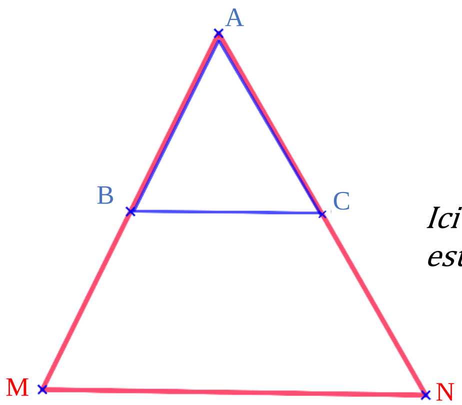
« *Géométrie dans les triangles* » *n°6*

Si on a deux triangles AMN et ABC tels que :
- A,M et B sont alignés
- A, N et C sont alignés
- (MN)//(BC),

Alors les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles.

Autrement dit $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. C'est l'égalité de Thalès.

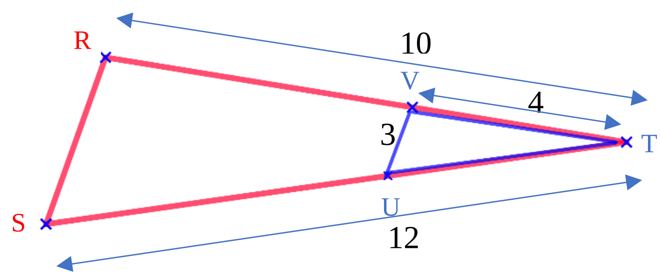
On peut alors dire que :
- Le plus grand triangle est un agrandissement du plus petit.
- Le plus petit triangle est une réduction du plus grand.
- Le rapport d'agrandissement ou de réduction est égal à $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.



Ici (BC)//(MN), donc le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC.

- Un exemple de calcul de longueurs :

Dans cette figure, les points R, T, V sont alignés, les points S, T, U sont alignés et (RS)//(UV).



On veut calculer TU et RS.

On a deux triangles RTS et TUV tels que :
- les points T, V, R sont alignés
- les points T, U, S sont alignés
- (RS)//(UV).

Donc d'après la propriété de Thalès, les longueurs des côtés des triangles RST et TUV sont proportionnelles : RST est un agrandissement de TUV.

Triangle RTS	RT	ST	RS
Triangle TVU	TV	TU	UV

Triangle RTS	10	12	RS
Triangle TVU	4	TU	3

× 2,5

1. On cherche le coefficient d'agrandissement $\frac{10}{4} = 2{,}5$
2. On l'utilise. TU = 12 ÷ 2,5 = 4,8 cm et RS = 3 × 2,5 = 7,5 cm.

Remarque : On aurait aussi pu calculer le rapport de réduction $\frac{TV}{RT} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.
$TU = 12 \times 0{,}4 = 4{,}8cm$ et $RS = 3 \div 0{,}4 = 7{,}5cm$.

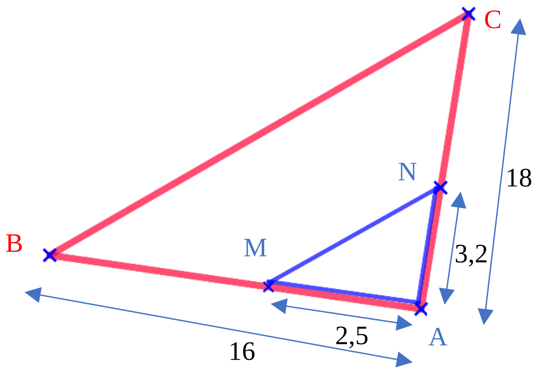
<u>Méthode</u> :

Dans une figure telle que trois points N, A et C sont alignés et trois points M, A et B sont alignés, il est possible de vérifier si les droites (MN) et (BC) sont parallèles en comparant les rapports de longueurs $\frac{AB}{AM}$ et $\frac{AC}{AN}$ (ou bien $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$).

« Géométrie dans les triangles » n°7

- <u>Si les rapports de longueurs sont différents</u>

La propriété de Thalès dit que, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, les rapports de longueurs sont forcément égaux.
Donc s'ils ne sont pas égaux, c'est que les droites ne sont pas parallèles.



On compare $\frac{AB}{AM}$ et $\frac{AC}{AN}$.

- $\frac{AB}{AM} = \frac{16}{2,5} = 6,4$
- $\frac{AC}{AN} = \frac{18}{3,2} = 5,625$

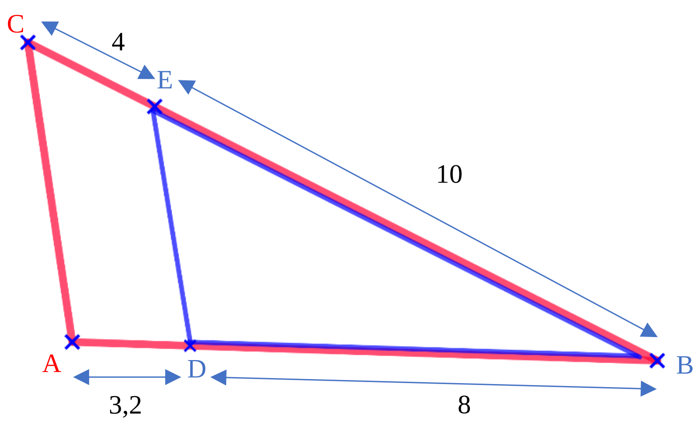
Donc $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites ne sont donc pas parallèles.

- <u>Si les rapports de longueurs sont égaux</u>

<u>Réciproque de la propriété de Thalès</u> :
- Si les rapports de longueurs sont égaux
- **ET SI** les points A, N, C et A, M, B sont alignés dans le même ordre

Alors les droites (MN) et (BC) sont bien parallèles.



On compare $\frac{BC}{EB}$ et $\frac{AB}{BD}$.

$$\frac{BC}{EB} = \frac{10+4}{10} = 1,4$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{8+3,2}{8} = 1,4$$

Donc $\frac{BC}{EB} = \frac{AB}{BD}$

De plus, les points B, E, C et B, D, A sont alignés dans le même ordre.

L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (ED) et (AC) sont donc parallèles.

Approche de la racine carrée d'un nombre :

La racine carrée de 100 est le nombre dont le carré est égal à 100 :
c'est 10 car $10 \times 10 = 100$.
On note $\sqrt{100} = 10$.

Définition :

La racine carrée d'un nombre positif n est le nombre positif dont le carré est égal à n.
On le note $\sqrt{n}$.

« Géométrie dans les triangles » n°3

Quelques racines carrées à connaître :

- $\sqrt{1} = 1$ car $1 \times 1 = 1$.
- $\sqrt{4} = 2$ car $2 \times 2 = 4$.
- $\sqrt{9} = 3$ car $3 \times 3 = 9$.
- $\sqrt{16} = 4$ car $4 \times 4 = 16$.
- $\sqrt{25} = 5$ car $5 \times 5 = 25$.
- $\sqrt{36} = 6$ car $6 \times 6 = 36$.
- $\sqrt{49} = 7$ car $7 \times 7 = 49$.
- $\sqrt{64} = 8$ car $8 \times 8 = 64$.
- $\sqrt{81} = 9$ car $9 \times 9 = 81$.
- $\sqrt{121} = 11$ car $11 \times 11 = 121$.
- $\sqrt{144} = 12$ car $12 \times 12 = 144$.

Tous ces nombres, dont la racine carrée est un nombre entier, sont des carrés parfaits.

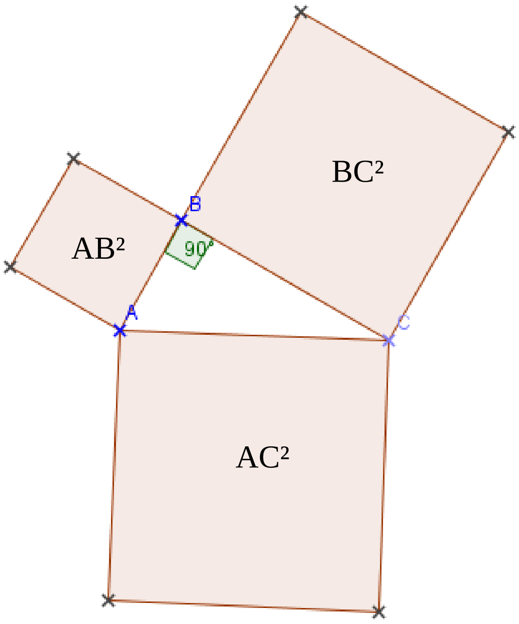
Pour d'autres nombres, qui ne sont pas des carrés parfaits, la calculatrice est indispensable.

- $\sqrt{15} \approx 3{,}87$

Propriété de Pythagore :

Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$: c'est l'égalité de Pythagore.
Autrement dit, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

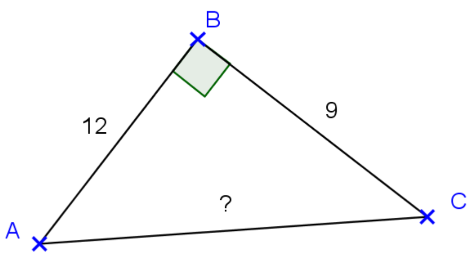
« Géométrie dans les triangles » n°4



L'aire du grand carré
est égale à
la somme des aires des deux plus petits carrés.

Dans un triangle rectangle, quand on connaît la mesure de deux côtés, on peut donc calculer la mesure du troisième.

Exemple 1 :
Calcul de la mesure de l'hypoténuse

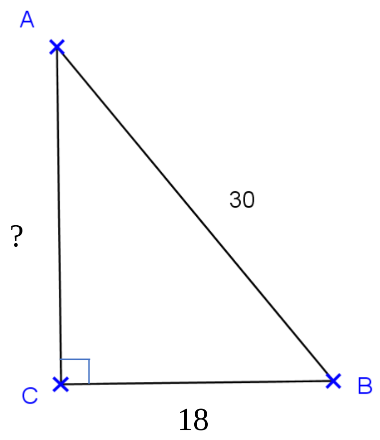


On veut calculer AC.

ABC est un triangle rectangle.
On peut donc utiliser la propriété de Pythagore.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 12^2 + 9^2$
$AC^2 = 144 + 81$
$AC^2 = 225$
$AC = \sqrt{225}$
$AC = 15cm.$

Exemple 2 :
Calcul de la mesure d'un côté de l'angle droit



On veut calculer AC.

ABC est un triangle rectangle.
On peut donc utiliser la propriété de Pythagore.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$30^2 = AC^2 + 18^2$
$900 = AC^2 + 324$
$AC^2 = 900 - 324$
$AC^2 = 576$
$AC = \sqrt{576}$
$AC = 24\ cm$

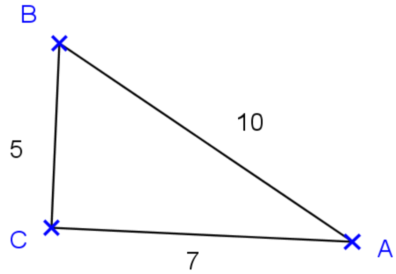
Méthode :

Quand on connait la longueur des trois côtés d'un triangle, on peut vérifier s'il est rectangle ou non. Pour cela, on compare la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés avec le carré de la longueur du plus grand.

« Géométrie dans les triangles » n°5

- Si les résultats sont différents :

La propriété de Pythagore affirme que si un triangle est rectangle alors ces résultats sont obligatoirement égaux.
Donc si les résultats sont différents, le triangle ne peut pas être rectangle.



AB est le plus grand côté. S'il y a un angle droit, c'est donc en C.
On compare donc BC^2+CA^2 et BA^2.

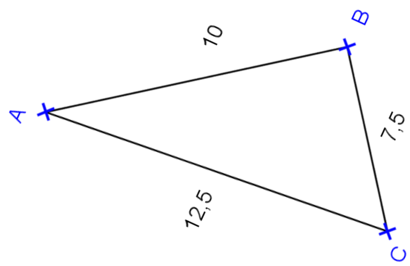
- $AB^2=10^2=100$
- $BC^2 + CA^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$

Donc $AB^2 \neq BC^2 + CA^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée. Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

- Si les résultats sont égaux :

Réciproque de la propriété de Pythagore :
Si l'égalité de Pythagore est vérifiée dans un triangle, alors ce triangle est rectangle.



AC est le plus grand côté. S'il y a un angle droit, c'est donc en B.
On compare donc AB^2+BC^2 et AC^2.

- $AC^2 = 12{,}5^2 = 156{,}25$
- $AB^2 + BC^2 = 10^2 + 7{,}5^2 = 100 + 56{,}25 = 156{,}25$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

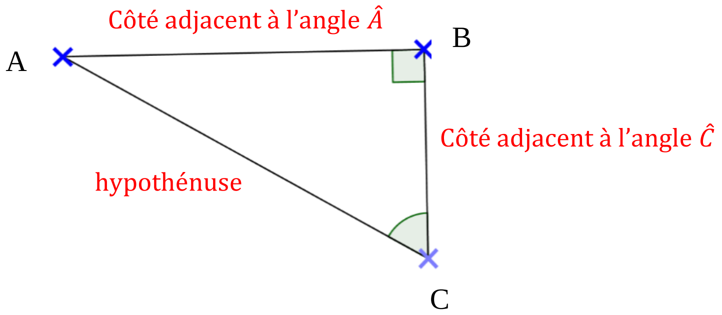
L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc ABC est un triangle rectangle en B.

<u>Définitions</u> :

Dans un triangle ABC rectangle en B, on définit :

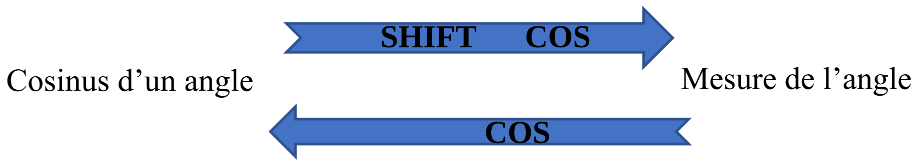
- Le quotient $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{C}}{\text{hypothénuse}}$, on le nomme le cosinus de l'angle $\hat{C}$.
- Le quotient $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{hypothénuse}}$, on le nomme le cosinus de l'angle $\hat{A}$.

A chaque valeur du cosinus de l'angle $\hat{C}$ correspond une mesure de l'angle $\hat{C}$, et inversement.
A chaque valeur du cosinus de l'angle $\hat{A}$ correspond une mesure de l'angle $\hat{A}$, et inversement.



<u>Remarques</u> :

- On ne définit pas le cosinus de l'angle droit.
- Le cosinus d'un angle est un rapport de longueurs : il n'a pas d'unité.
- Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle est toujours compris entre 0 et 1.
- Le cosinus de l'angle $\hat{C}$, par exemple, se note cos $\hat{C}$.
- La calculatrice permet de faire le lien entre la valeur d'un quotient et la mesure d'angle qui lui correspond, et inversement.
  <u>**Elle doit se trouver en mode degré**</u> pour obtenir une mesure d'angle en degré.



➢ Dans le triangle rectangle ci-dessous, trouver la mesure de l'angle $\widehat{K}$.

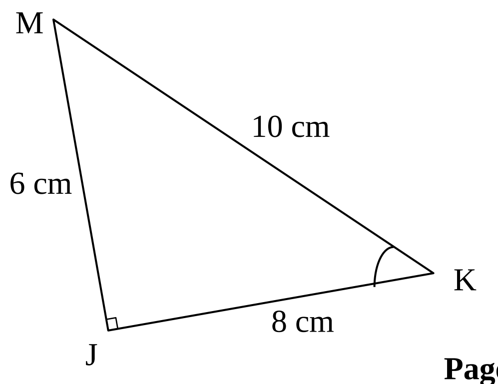
« Géométrie dans les triangles » n°8

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{K}$ est [JK].
L'hypoténuse du triangle est [MK].

$$\cos \widehat{K} = \frac{JK}{MK} = \frac{8}{10}$$

A la calculatrice, on tape SHIFT COS $\dfrac{8}{10}$

On trouve $\widehat{K} \approx 36{,}9°$.

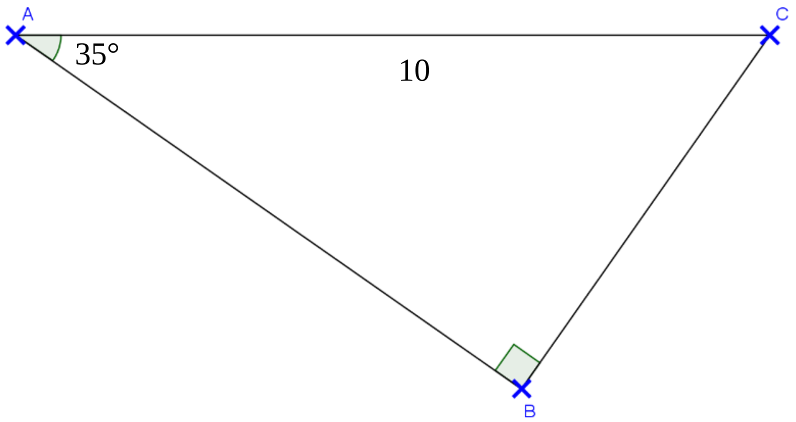


Méthode :

Dans un triangle rectangle, si on connait la mesure d'un angle aigu et d'un côté, on peut calculer la mesure d'un autre côté.

« Géométrie dans les triangles » n°9

- Exemple 1 : On veut calculer la longueur AB.



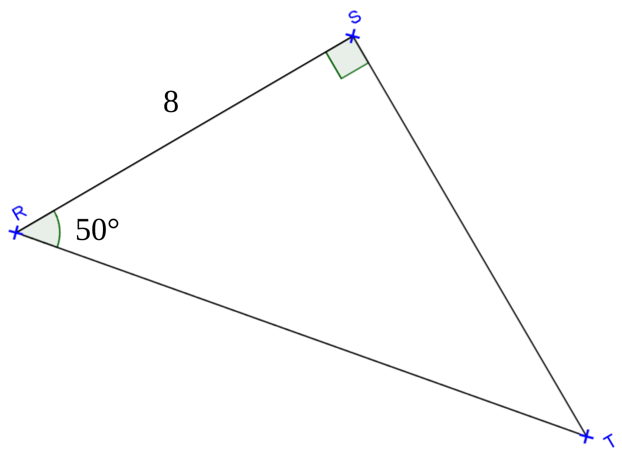
On écrit le quotient égal au cosinus de l'angle connu : $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$

$\cos 35° = \frac{AB}{10}$ $\times \cos 35°$

On détermine l'opération à effectuer pour calculer AB : $AB = 10 \times \cos 35°$

$AB \approx 8{,}2\ cm$

- Exemple 2 : On veut calculer la longueur RT.



On écrit le quotient égal au cosinus de l'angle connu : $\cos \hat{R} = \frac{\text{RS}}{\text{RT}}$

$\cos 50° = \frac{8}{\text{RT}}$ $\times \cos 50°$

On détermine l'opération à effectuer pour calculer RT : $\text{RT} = \frac{8}{cos\, 50°}$

$\text{RT} \approx 12{,}4$ cm.

Définition :

- Une expression littérale est une expression mathématique dont l'écriture contient une ou plusieurs lettres.
- Ces lettres sont utilisées pour représenter une grandeur dont la valeur est indéterminée ou susceptible de varier.

➢ Ecrire une expression littérale représentant le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 10
- Tripler le résultat
- Enlever le double du nombre de départ
- Enlever 30

Le nombre de départ peut être différent selon le choix effectué : on peut utiliser une lettre pour le représenter.
Ici, on choisit d'appeler n le nombre choisi.

Le programme peut alors se traduire par l'expression littérale $(n + 10) \times 3 - 2n - 30$.

Méthode :

« Calcul littéral » n°4

Pour savoir si une expression littérale s'apparente à une somme ou à un produit, on cherche l'opération qu'il faudrait effectuer en dernier, en respectant les priorités de calcul :

- Si la dernière opération est une addition ou une soustraction, l'expression est une somme.
- Si la dernière opération est une multiplication ou une division, l'expression est un produit.

➢ $(n + 10) \times 3 - 2n - 30$ est une somme car on effectue d'abord le calcul entre parenthèses, puis la multiplication, et on termine par les soustractions de gauche à droite (la dernière opération est entourée).

➢ $(2n + 5) \times (3n - 4)$ est un produit car on commence par effectuer les 2 calculs entre parenthèses, puis on termine par la multiplication
(la dernière opération est entourée).

➢ $17 + 5 \times (3n - 8)$ est une somme car on effectue d'abord le calcul entre parenthèses, puis la multiplication, et on termine par l'addition
(la dernière opération est entourée).

➢ $6 \times (n + 10)$ est un produit car on commence par effectuer le calcul entre parenthèses, puis on termine par la multiplication
(la dernière opération est entourée).

<u>Définitions</u> :

Une expression, littérale ou non, peut parfois s'écrire sous différentes formes.

- Développer une expression, c'est écrire les produits en sommes : une expression développée est donc une somme.
- Factoriser une expression, c'est écrire les sommes en multiplication : une expression factorisée est donc un produit.

Développer $\Longrightarrow$

Formes factorisées : ce sont des produits

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4$$

$$4 \times (n - 1) = n - 1 + n - 1 + n - 1 + n - 1$$

Formes développées : ce sont des sommes

$\Longleftarrow$ Factoriser

<u>Propriété</u> :

- La règle de distributivité permet de développer, ou factoriser une expression.
- Dans cette règle, les lettres $k, a\ et\ b$ représentent des nombres quelconques.
On a toujours :

Développer $\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{k} \times (a + b) = \boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b$$

$\Longleftarrow$ Factoriser

➢ <u>Développer une expression</u> : *« Calcul littéral » n°5 et 6*

- $\mathbf{7} \times (3a + 4) = \mathbf{7} \times 3a + \mathbf{7} \times 4 = 21a + 28$
- $\mathbf{5} \times (3a - 6) = \mathbf{5} \times \big(3a + (-6)\big) = \mathbf{5} \times 3a + \mathbf{5} \times (-6) = 15a + (-30) = 15a - 30$

➢ <u>Factoriser une expression</u> : *« Calcul littéral » n°7*

- $5a - 40 = \mathbf{5} \times a - \mathbf{5} \times 8 = \mathbf{5} \times (a - 8)$
- $18a + 12 = \mathbf{6} \times 3a + \mathbf{6} \times 2 = \mathbf{6} \times (3a + 2)$

<u>Définition</u> :

- Réduire une expression, c'est la simplifier en calculant les termes de même nature ensemble : les nombres avec les nombres, les termes avec une lettre avec les termes avec la même lettre, etc…
- L'expression obtenue est donc « plus courte » : elle est réduite.
- En fait, cela revient à factoriser plusieurs parties de l'expression.

« Calcul littéral » n°3

- Réduire $A = 30a^2 + 12a + 8 - 4a + 6a^2 - 10$

$A = 30a^2 + 6a^2 + 12a - 4a + 8 - 10$ on rassemble les termes de même nature

$A = (30 + 6)a^2 + (12 - 4)a - 2$ on factorise

$A = 36a^2 + 8a - 2$

- Développer et réduire $B = 17a + 5 \times (4 - 3a) - 3 \times (-a + 8)$

$B = 17a + 5 \times \big(4 + (-3a)\big) + (-3) \times (-a + 8)$ on écrit les soustractions comme des additions

$B = 17a + 5 \times 4 + 5 \times (-3a) + (-3) \times (-a) + (-3) \times 8$ on développe les produits

$B = 17a + 20 + (-15a) + 3a + (-24)$ on calcule les produits

$B = 17a + (-15a) + 3a + 20 + (-24)$ on rassemble les termes de même nature

$B = (17 + (-15) + 3)a + 20 + (-24)$ on factorise

$B = 5a - 4$ on termine de réduire

Définitions :

- Une équation est une égalité qui contient au moins une valeur indéterminée.
- Cette valeur indéterminée est appelée « l'inconnue ».

- $2n - 3 = 7$ est une équation et n est l'inconnue. Cela correspond à $2 \times ? - 3 = 7$.
- $30 + 2 \times 8 = 46$ n'est pas une équation : c'est une égalité, mais sans inconnue.

Définition :

- Une équation est dite du « premier degré » si l'exposant des inconnues ne dépasse pas 1.

- $10n + 4 = 7$ est une équation du premier degré.
- $20 - 4n = 7n + 6$ est une équation du premier degré.
- $3n^2 - 4 = 8$ et $5n^3 - 8n = 5n - 6$ ne sont pas des équations du premier degré.

Définition :

Une solution d'une équation est une valeur que l'on peut substituer à l'inconnue de façon à rendre l'égalité vraie.

- On donne l'équation $10 + 2n = 3n - 1$
  - Le nombre 5 n'est pas une solution de cette équation car en remplaçant l'inconnue n par 5, l'égalité devient $10 + 2 \times 5 = 3 \times 5 - 1$, c'est-à-dire $20 = 14$, ce qui n'est pas correct.
  - Le nombre 11 est une solution de cette équation car en remplaçant l'inconnue n par 11, l'égalité devient $10 + 2 \times 11 = 3 \times 11 - 1$, c'est-à-dire $32 = 32$, ce qui est correct.

Définition :

Résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres solutions de cette équation.

La méthode de cette page permet uniquement de résoudre des équations du premier degré qui ne possèdent qu'une inconnue (une seule lettre utilisée, éventuellement répétée plusieurs fois).

Propriétés :

« Calcul littéral » n°8

- Lorsqu'on ajoute ou soustrait le même nombre aux deux membres de l'équation, ses solutions ne changent pas.
- Lorsqu'on multiplie ou divise par le même nombre non nul les deux membres de l'équation, ses solutions ne changent pas.

On veut résoudre l'équation $\mathbf{5n - 8 = 2n + 16}$

On essaie de se ramener à une équation simple : les inconnues dans un membre et les nombres connus dans l'autre. On « élimine » les termes mal placés par une opération bien choisie.

On « élimine » -8 *dans le membre de gauche en effectuant* $+8$.
Puis on réduit.

$$\begin{array}{rcl} 5n - 8 & = & 2n + 16 \\ +8 & & +8 \\ \hline 5n & = & 2n + 24 \end{array}$$

On « élimine » $2n$ *dans le membre de gauche en effectuant* $-2n$.
Puis on réduit.

$$\begin{array}{rcl} 5n & = & 2n + 24 \\ -2n & & -2n \\ \hline 3n & = & 24 \end{array}$$

On divise pour trouver la valeur à donner à n.

$$\frac{\cancel{3}n}{\cancel{3}} = \frac{24}{3}$$

$$n = 8$$

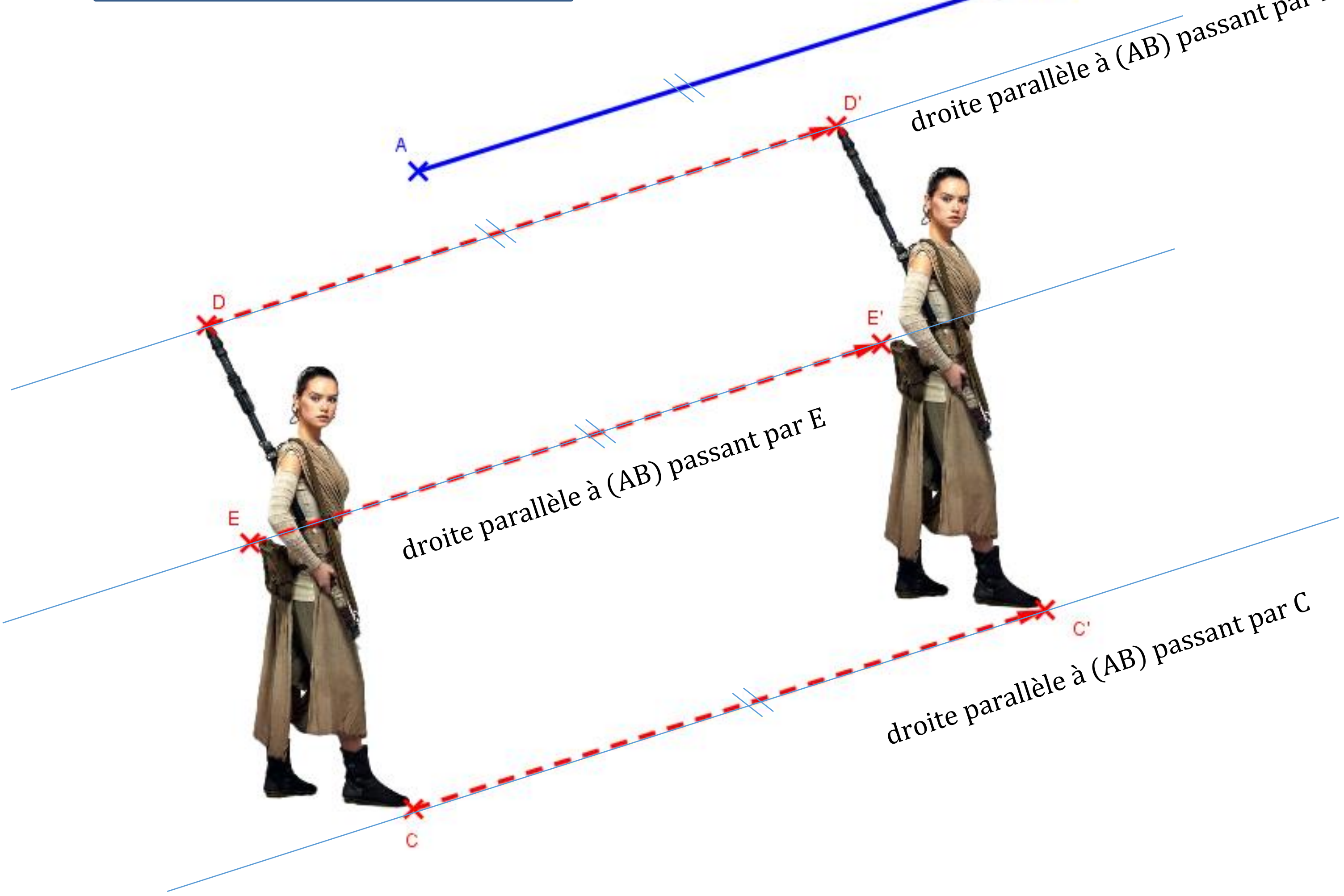
On peut facilement vérifier en testant l'égalité avec la valeur trouvée :

$$5 \times 8 - 8 = 32 \quad et \quad 2 \times 8 + 16 = 32. \quad \text{C'est correct !}$$

Définition :

- Une translation correspond à un glissement rectiligne.
- Ci-dessous, l'image de Rey a été transformée par la même translation que celle qui amène le point A sur le point B.
- Autrement dit, chacun des points qui la composent a glissé de façon rectiligne dans la direction et le sens de la flèche $\overrightarrow{AB}$ et selon la longueur de $\overrightarrow{AB}$.
- On dit que $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation : on le représente par une flèche.

« Transformations » n°3 et 4



Pour construire l'image d'une figure par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on procède point par point. Pour le point D par exemple, on commence par tracer la parallèle à la droite (AB) passant par D pour obtenir la direction du glissement. Puis on se déplace sur cette parallèle dans le sens indiqué par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, sur une longueur égale à la distance AB : on obtient alors l'image D' du point D. On recommence pour chaque point de la figure.

Propriété :

Lorsqu'un objet est transformé par une translation, il n'est pas déformé, ses longueurs ne changent pas, ses angles ne changent pas, son aire ne change pas, son volume ne change pas : il est simplement déplacé.

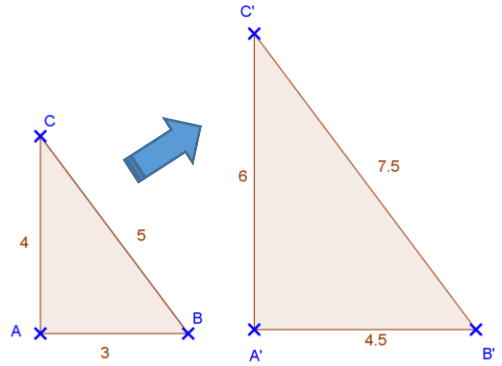
<u>Définition et propriétés</u> :

- Agrandir ou réduire une figure, c'est multiplier toutes ses longueurs par un même nombre :

  - Si les longueurs sont multipliées par un nombre supérieur à 1, la figure est agrandie.
  - Si les longueurs sont multipliées par un nombre inférieur à 1, la figure est réduite.

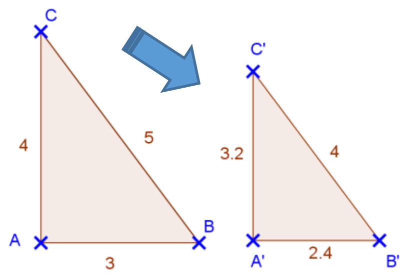
- Les longueurs de la nouvelle figure sont donc proportionnelles aux longueurs de la figure initiale.

- Dans un agrandissement ou une réduction, les angles ne changent pas.



Agrandissement de rapport 1,5 :

$4 \times 1,5 = 6$; $3 \times 1,5 = 4,5$; $5 \times 1,5 = 7,5$



Réduction de rapport 0,8 :

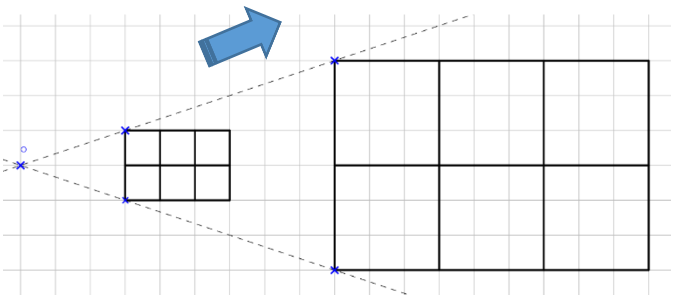
$4 \times 0,8 = 3,2$; $3 \times 0,8 = 2,4$; $5 \times 0,8 = 4$

<u>Propriété</u> :

Lorsque les longueurs d'un objet sont multipliées par un nombre positif k :

- Son aire est multipliée par k^2.
- Son volume est multiplié par k^3.

« Transformations » n°9

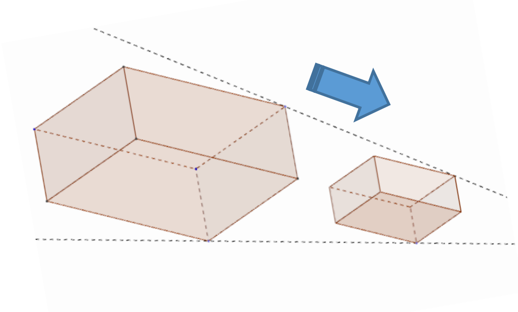


L'aire du rectangle de gauche est de 6 cm^2.

On procède à un agrandissement de rapport 3 de ce rectangle et on obtient le rectangle de droite.

L'aire du rectangle agrandi est :

$6 \times 3^2 = 54\ cm^2$.



Le volume du pavé de gauche est 30 cm^3.

On procède à une réduction de rapport 0,5 de ce pavé et on obtient le pavé de droite.

Le volume du pavé réduit est :

$30 \times 0,5^3 = 3,75\ cm^3$.

PROPORTIONNALITE : Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition :

On dit que deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre. Ce nombre est appelé le coefficient de proportionnalité.

« Proportionnalité » n°1

➢

Quantité d'essence achetée (L)	2	10	30
Prix payé (€)	3	15	45

Pour vérifier s'il s'agit d'une situation de proportionnalité, on peut calculer chaque quotient :
$\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{15}{10} = 1{,}5$; $\frac{45}{30} = 1{,}5$.
Tous les quotients sont égaux : on trouve donc le prix payé en multipliant la quantité d'essence par un même nombre. Il s'agit d'une situation de proportionnalité.
1,5 est le coefficient de proportionnalité.

➢

10	15	30
144	171	342

$\frac{144}{10} = 14{,}4$; $\frac{171}{15} = 11{,}4$; $\frac{342}{30} = 11{,}4$

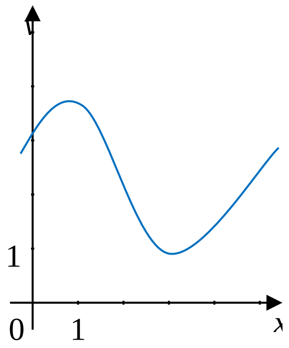
Ici les quotients ne sont pas tous égaux : il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

PROPORTIONNALITE : Reconnaître graphiquement une situation de proportionnalité

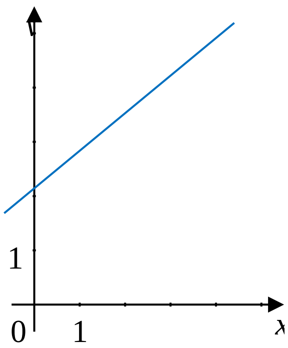
Propriétés :

- Une situation de proportionnalité est toujours représentée dans un repère par une droite passant par l'origine de ce repère.
- Une droite passant par l'origine d'un repère représente toujours une situation de proportionnalité.

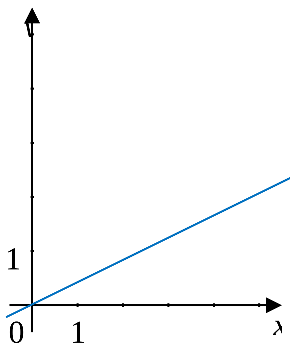
« Proportionnalité » n°7



Pas de proportionnalité



Pas de proportionnalité



Proportionnalité

Il existe plusieurs façons de calculer une donnée manquante dans une situation de proportionnalité, comme sur cet exemple :

« On suppose que des clés usb sont vendues à l'unité : le prix à payer est donc proportionnel au nombre de clés achetées. On sait que 5 clés coûtent 65€ et 15 clés coûtent 195€.
Combien coûtent 20 clés ? »

- **Méthode 1** :
  Si on achète 4 fois plus de clés,
  on paiera 4 fois plus cher

×4

Nombre de clés usb achetées	5	15	20
Prix payé (€)	65	195	*65×4=260*

×4

- **Méthode 2** :
  Le prix de 20 clés correspond
  au prix de 5 clés plus le prix de 15 clés.

Nombre de clés usb achetées	5	15	20
Prix payé (€)	65	195	*65+195=260*

- **Méthode 3** :
  On peut utiliser le prix d'une clé :
  le coefficient de proportionnalité

$\times 13$

Nombre de clés usb achetées	5	15	20
Prix payé (€)	65	195	$\mathbf{20 \times 13} = 260$

$\frac{65}{5} = 13$

« Proportionnalité » n°4

- **Méthode 4** :
  Si les méthodes précédentes ne peuvent être mises en œuvre simplement, on peut utiliser l'égalité des produits en croix :

Propriétés :
a, b, c et d représentent des nombres quelconques (b et d sont non nuls).

- Si deux quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux, alors les produits en croix $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux.
- Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont donc toujours égaux.

« Proportionnalité » n°8

On veut trouver le prix de 13 clés sachant que 5 clés coûtent 47,50€.

Nombre de clés usb achetées	5	13
Prix payé (€)	47,50	***P***

P représente le prix de 13 clés

La situation relève de la proportionnalité, les produits en croix $47{,}50 \times 13$ et $5 \times P$ sont égaux.
$47{,}50 \times 13 = 5 \times P$
$617{,}50 = 5 \times P$
On en déduit donc que $P = \frac{617{,}50}{5} = 47{,}50$€

CALCULS DE VITESSES : Calculer une vitesse moyenne

<u>Définition</u> :

- La vitesse moyenne est la distance parcourue en 1 unité de temps, en supposant que la vitesse reste constante sur tout le trajet.
- On la calcule donc en effectuant le quotient de la distance parcourue d par la durée du trajet t : on dit que c'est une grandeur quotient.
- $v = \frac{d}{t}$.

« *Grandeurs composées* » *n°1*

➢ On parcourt 270km en 3h. A quelle vitesse se déplace-t-on ?

L'unité de temps est ici l'heure. On recherche la distance parcourue en 1h.

$$\frac{270km}{3h} = 90km/h.$$

On parcourt 90km en 1h, autrement dit on se déplace à la vitesse de 90 km/h.

➢ La lumière parcourt environ 1 500 000km en 5s. Quelle est sa vitesse ?

Cette fois, l'unité de temps est la seconde. On cherche la distance parcourue en 1s.

$$\frac{1\,500\,000km}{5s} = 300\,000km/s.$$

Elle parcourt 300 000km en 1s, autrement dit elle se déplace à la vitesse de 300 000km/s.

CALCULS DE VITESSES : Calculer une durée, une distance

➢ **<u>Calcul d'une durée</u> :**

On avance à la vitesse de 10,44 m/s sur une distance de 100m.
Quelle est la durée de la course ?
On indique dans le tableau qu'on parcourt 10,44m en 1s, puis on place 100m.

÷ 10,44

Distance (m)	10,44	100
Durée (s)	1	?

× 10,44

$$\boxed{t = \frac{d}{v}}$$

$100m \div 10{,}44m/s \approx 9{,}58s$. La course a donc duré 9,58s.

➢ **<u>Calcul d'une distance</u> :**

Le son se déplace dans l'eau pure à la vitesse de 1,48km/s.
Quelle distance parcourt-il en 2 minutes ?

÷ 1,48

Distance (km)	1,48	?
Durée (s)	1	120

× 1,48

$$\boxed{d = v \times t}$$

$120s \times 1{,}48km/s = 177{,}6km$. Le son parcourt donc 177,6km en minutes dans l'eau.

« *Grandeurs composées* » *n°2*

Exemple 1 : On veut convertir 10,44 m/s en km/h.

- La question de traduit par :
  « On parcourt 10,44 m en $1s$ et on cherche combien de km on pourrait parcourir en $1h$ ».

- On sait que $1h = 3\,600s$.
  En 1heure, on pourrait donc parcourir « 3 600 fois plus de mètres » qu'en 1 seconde.
  $10{,}44m \times 3600 = 37\,584m$
  En 1 heure, on pourrait donc parcourir 37 584 mètres.

- On sait que $37\,584m = 37{,}584\ km$
  En 1 heure, on pourrait parcourir $37{,}584km$.
  Autrement dit, on se déplacerait à la vitesse de $37{,}584\ km/h$.

Exemple 2 : On veut convertir 130 km/h en m/s.

- La question se traduit par :
  « On parcourt 130 km en $1h$ et on cherche combien de m on pourrait parcourir en $1s$ ».

- On sait que $1h = 3\,600s$.
  En 1 seconde, on va donc parcourir « 3 600 fois moins de kilomètres » qu'en 1heure.
  $130km \div 3\,600 \approx 0{,}036km$
  En 1 seconde, on parcourt donc 0,036 kilomètres.

- On sait que $0{,}036km = 36m$.
  En 1 seconde, on parcourt donc 36 mètres.
  Autrement dit, on se déplace à la vitesse de $36m/s$.

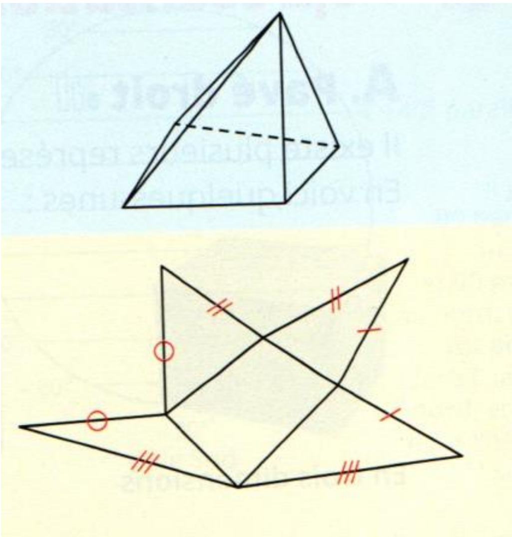
Définition :

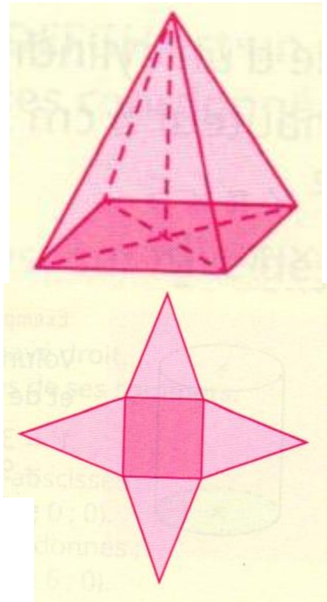
Une pyramide est un solide dont :

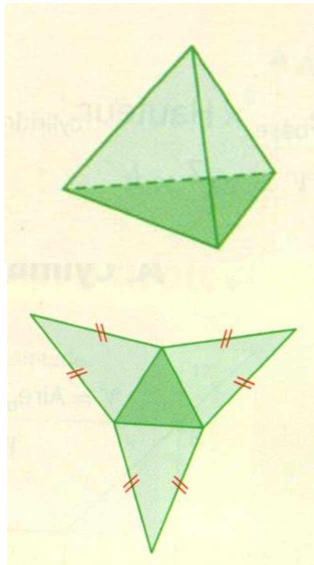
- La base est un polygone
- Les faces latérales sont des triangles possédant un sommet commun : le sommet de la pyramide.

« Espace » n°5

➢ Quelques exemples de pyramides et les patrons correspondants :





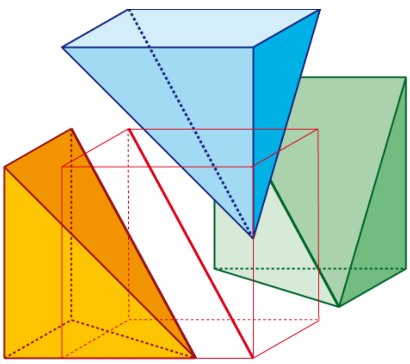


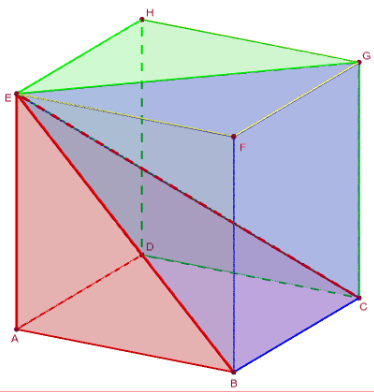
Formule de calcul du volume :

Avec 3 pyramides identiques, on forme un pavé droit.

Par conséquent, le volume d'une pyramide est égal au tiers du volume d'un pavé droit de mêmes dimensions.

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$$



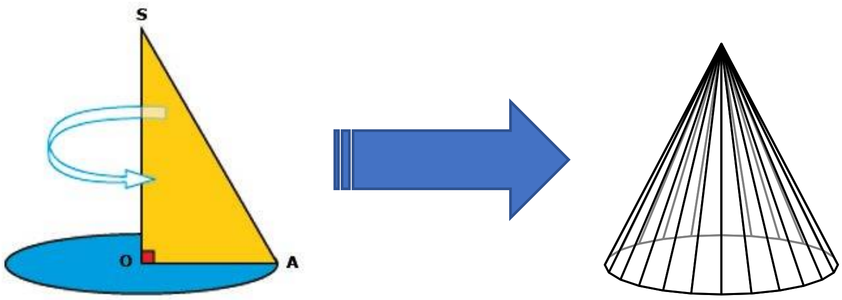


➢ Calculer le volume d'une pyramide de hauteur 18 cm dont la base est un carré de 9 cm de côté.
Aire du carré de base $= 9\ cm \times 9\ cm = 81\ cm^2$.

Volume de la pyramide $= \dfrac{81cm^2 \times 18\ cm}{3} = 486\ cm^3$.

<u>Définition</u> :

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant effectuer un tour à un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

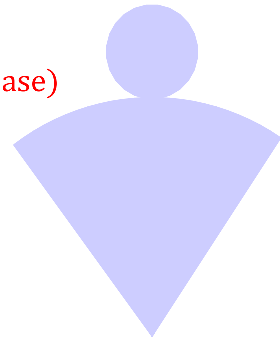


« Espace » n°6

<u>Propriétés</u> :

- Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque (pour la base) et d'une portion de disque.

- La longueur de l'arc de cercle sur la portion de disque est égale au périmètre du disque de base.

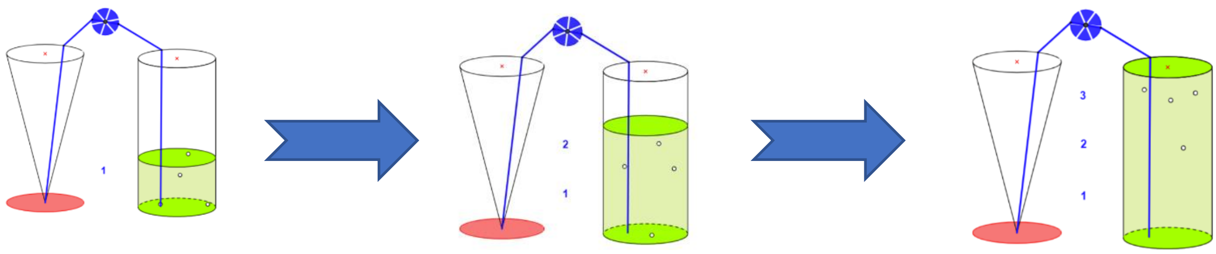


<u>Formule de calcul de volume</u> :

En versant 3 fois le contenu d'un cône de révolution dans un cylindre de mêmes dimensions, on remplit exactement ce cylindre.

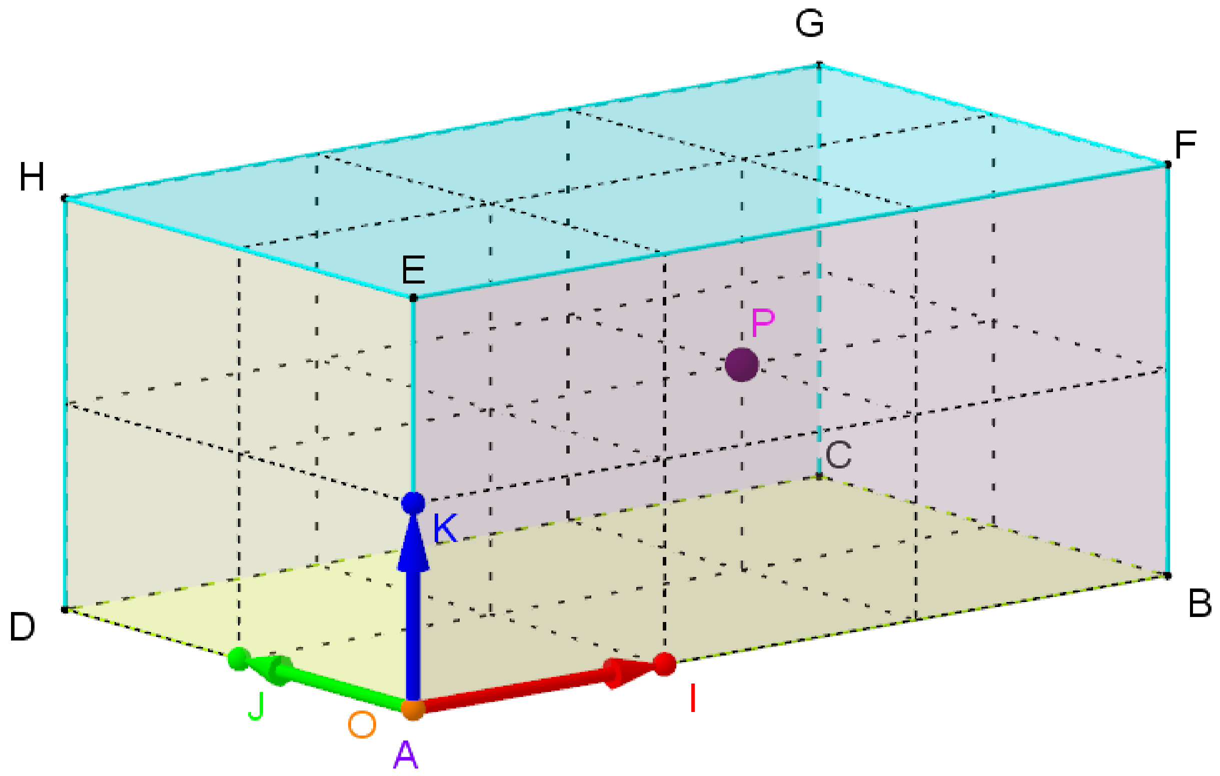
Autrement dit, le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du volume d'un cylindre de mêmes dimensions.

$$\text{Volume d'un cône de révolution} = \frac{\pi \times \text{Rayon}^2 \times \text{Hauteur}}{3}$$



➢ Calculer le volume d'un cône de révolution de 10 cm de hauteur, dont le rayon de la base mesure 4 cm.

$$\text{Volume} = \frac{\pi \times (4cm)^2 \times 10cm}{3} = \underbrace{\frac{160\pi}{3}}_{\text{Valeur exacte}} cm^3 \approx \underbrace{168\ cm^3}_{\text{Valeur approchée}}$$



Propriété :

Pour repérer un point dans l'espace, on a besoin d'un repère muni de trois axes :

- L'axe des abscisses : l'axe (AB) sur le dessin ci-dessus. AI représente 1 unité.
- L'axe des ordonnées : l'axe (AD) sur le dessin ci-dessus. AJ représente 1 unité.
- L'axe des altitudes : l'axe (AE) sur le dessin ci-dessus. AK représente 1 unité.

On indique ses coordonnées sous cette forme : (abscisse ; ordonnée ; altitude).

« Espace » n°4

- Les coordonnées du point A sont (0 ; 0 ; 0)
- Les coordonnées du point B sont (3 ; 0 ; 0)
- Les coordonnées du point C sont (3 ; 2 ; 0)
- Les coordonnées du point D sont (0 ; 2 ; 0)
- Les coordonnées du point E sont (0 ; 0 ; 2)
- Les coordonnées du point F sont (3 ; 0 ; 2)
- Les coordonnées du point G sont (3 ; 2 ; 2)
- Les coordonnées du point H sont (0 ; 2 ; 2)
- Les coordonnées du point I sont (1 ; 0 ; 0)
- Les coordonnées du point J sont (0 ; 1 ; 0)
- Les coordonnées du point K sont (0 ; 0 ; 1)
- Les coordonnées du point P sont (2 ; 1 ; 1)

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une petite start-up, spécialisée dans la conception de jeux vidéos, de 15 personnes.

2 000 – 2 200 – 2 200 – 2 100 – 2 500 – 2 000 – 2 500 – 2 000 – 3 000 – 2 200 – 2 100 – 2 000
2 100 – 2 000 – 2 100

Définitions :

- **L'effectif de la série** correspond au nombre de valeurs qui la composent.
- **L'effectif d'une valeur** correspond au nombre de fois que cette valeur apparait.

➢ L'effectif de la série est 15 car elle est composée de 15 valeurs.

➢ L'effectif de la valeur 2 200€ est 3 car il y a 3 valeurs égales à 2 200€.

Définition :

La fréquence d'une valeur se calcule ainsi :

$$\frac{\text{Effectif de la valeur}}{\text{Effectif total de la série}}$$

« Statistiques » n°1

➢ La fréquence de la valeur 2 200 est $\frac{3}{15}$ car elle apparaît 3 fois sur les 15 valeurs de la série.

On peut la donner en pourcentage $\frac{3}{15} = 0,20 = 20\%$.
Donc 20% des salariés de cette start-up touchent 2 200€ par mois.

Définition :

La moyenne d'une série se calcule ainsi :

$$\frac{\text{Somme des valeurs de la série}}{\text{Nombre de valeurs dans la série}}$$

« Statistiques » n°2

➢ Salaire moyen =

$$\frac{2\,000 + 2\,200 + 2\,200 + 2\,100 + 2\,500 + 2\,000 + 2\,500 + 2\,000 + 3\,000 + 2\,200 + 2\,100 + 2\,000 + 2\,100 + 2\,000 + 2\,100}{15}$$

Salaire moyen= 2 200€.

Cela signifie que, avec l'enveloppe salariale totale, si tous les employés avaient touché le même salaire, ce salaire aurait été égal à 2 200€.

<u>Définition :</u>

<u>La médiane d'une série</u> statistique est un nombre (pas forcément dans la série) qui partage cette série en deux groupes de même effectif. **<u>Les valeurs de la série doivent être ordonnées !</u>**

Au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane.
Au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à la médiane.

« Statistiques » n°4

En ordonnant les salaires de cette start-up, on obtient :

$$\underbrace{2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,100\text{-}2\,100}_{7 \text{ valeurs}}\text{-}\underset{\text{médiane}}{\boxed{\mathbf{2\,100}}}\text{-}\underbrace{2\,100\text{-}2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,000\text{-}2\,500\text{-}2\,500\text{-}3\,000}_{7 \text{ valeurs}}$$

➢ Le salaire médian est 2 100€ : cela signifie qu'au moins la moitié des salariés touchent un salaire inférieur ou égal à 2 100€. Cela permet parfois de relativiser la moyenne.

<u>Convention</u> :

Si la série comporte un nombre pair de valeurs, on prend en général comme médiane la moyenne des deux valeurs centrales.

➢ Dans la série ci-dessous, on pourrait choisir 2 250 comme médiane.

$$\underbrace{2\,000 - 2\,100 - 2\,200}_{3 \text{ valeurs}} - \underbrace{2\,300 - 2\,300 - 2\,500}_{3 \text{ valeurs}}$$

$$\text{Médiane} = \frac{2\,200 + 2\,300}{2} = 2\,250€$$

Au moins la moitié des salariés touchent un salaire supérieur ou égal à 2 250€.

Définition :

Si la série est présentée à l'aide d'un tableau d'effectifs, il faut penser à prendre en compte l'effectif de chaque valeur : on parle alors de moyenne pondérée.

Ci-contre les salaires touchés par les 235 salariés d'une entreprise :

Salaire	Effectif
1 400€	**45**
1 500€	**85**
1 900€	**40**
2 000€	**35**
2 200€	**30**

- Moyenne des salaires :

« Statistiques » n°3

Il y a 45 valeurs égales à 1 400€, 85 valeurs égales à 1 500€, etc…

$$\frac{1400\times45+1500\times85+40\times1900+35\times2000+30\times2200}{235}\approx 1\,713\text{ €}$$

- Médiane des salaires :

« Statistiques » n°5

  - Il y a 235 valeurs dans cette série et on cherche la valeur « centrale ».
  - On calcule son rang ---> 235 : 2 = 117,5.
    La médiane est la 118ème valeur de la série (il y en a donc 117 avant elle et 117 après).

1 400 ; … ; 1 400 ; 1 500 ; … ; 1 500 ; 1 900 ; … ; 1 900 ; 2 000 ; … ; 2 000 ;… ; 2 200 ; … ; 2 200

1ère 45ème 46ème 130ème 131ème 170ème 171ème 205ème 206ème 235ème

La 118ème valeur est donc un des 1 500€ : c'est la médiane de la série : la moitié des salariés touchent un salaire inférieur ou égal à 1 500€.

Propriété :

Dans un diagramme circulaire, la mesure de l'angle de chaque « part de camembert » est proportionnelle à l'effectif (ou la fréquence) qu'elle représente.

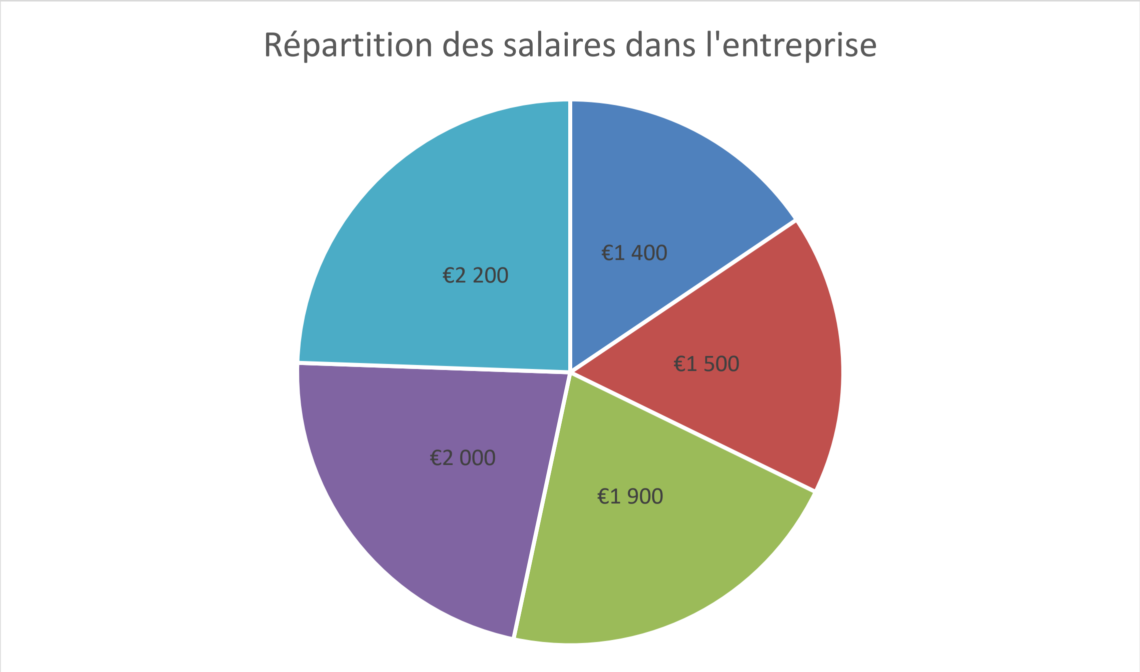
- Reprenons l'exemple de l'entreprise précédente.

« Statistiques » n°6

  - On calcule la fréquence de chaque valeur.
  - On cherche le coefficient de proportionnalité permettant de passer des fréquences aux mesures d'angles.
    Dans un diagramme complet, nous avons 360° pour représenter 100% des valeurs.
    $360 = 100 \times 3{,}6$
    Autrement dit, la mesure de l'angle est « 3,6 fois plus grande » que la fréquence en pourcentage.
  - On calcule les mesures d'angles.
  - On construit le diagramme circulaire : bien faire apparaitre ce que représente chaque part et choisir un titre explicite au diagramme.

$\times 3{,}6$

Salaire	Effectif	Fréquence (%)	Mesure de l'angle (°)
1 400€	45	$\frac{45}{235} \times 100 \approx 19$	68,4
1 500€	85	$\frac{85}{235} \times 100 \approx 36$	129,6
1 900€	40	$\frac{40}{235} \times 100 \approx 17$	61,2
2 000€	35	$\frac{35}{235} \times 100 \approx 15$	54
2 200€	30	$\frac{30}{235} \times 100 \approx 13$	46,8
TOTAL		**100**	**360**



Définition :

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'on connait tous les résultats possibles mais qu'on ne peut pas prédire avec certitude lequel va se produire : elle est uniquement due au hasard.

- Essayer de donner les résultats gagnants du loto est une expérience aléatoire.
- Essayer de donner la bonne réponse à un problème de maths n'est pas une expérience aléatoire.

Définition :

Une issue est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

- Si je lance une pièce pour jouer à PILE ou FACE, il y a 2 issues possibles : PILE et FACE.

Définition :

Un évènement est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors d'une expérience.

- Si je lance un dé à 6 faces et que je regarde la face supérieure du dé, les issues possibles sont 1,2,3,4,5 et 6.
  « J'obtiens un nombre pair », par exemple, est un évènement de cette expérience.
  « J'obtiens 3 » est un évènement dit élémentaire (il n'y a qu'1 issue qui le réalise).

Définition :

« Probabilités » n°1

La probabilité d'un évènement représente « la chance » qu'a cet évènement de se réaliser.
C'est un nombre compris entre 0 et 1.
On le détermine en donnant la fréquence de réalisation de cet évènement.

- Si je lance un dé à 6 faces, je souhaite trouver la probabilité d'obtenir un résultat strictement supérieur à 4.
  Il y a 2 possibilités que cela se produise (obtenir « cinq » ou « six »), sur un total de 6 issues.
  La probabilité d'obtenir un résultat strictement supérieur à 4 est donc de $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$.
  J'ai « une chance sur trois » d'y parvenir.

Propriétés :

- Une probabilité égale à 0 signifie qu'un évènement est impossible.
- Une probabilité égale à 1 signifie qu'un évènement est certain.

Définition :
Deux évènements sont dits incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

- Je lance un dé à 6 faces et je regarde la face supérieure du dé.

  L'évènement « j'obtiens un nombre supérieur ou égal à 4 » et l'évènement « j'obtiens un nombre inférieur à 3 » sont incompatibles.

Définition :
Deux évènements sont dits contraires lorsque l'un se réalise lorsque l'autre ne se réalise pas.

- Je lance un dé à 6 faces et je regarde la face supérieure du dé.

  Les évènements « j'obtiens un nombre pair » et « j'obtiens un nombre impair » sont des évènements contraires. : c'est obligatoirement l'un ou l'autre qui se réalisera.

  Les évènements « j'obtiens un nombre pair » et « j'obtiens 5 » ne sont pas des évènements contraires : on pourrait obtenir 3 par exemple : ce n'est pas forcément l'un ou l'autre. Par contre, ce sont des évènements incompatibles.

Propriété :
La probabilité de l'évènement contraire d'un évènement A est égale à la différence entre 1 et la probabilité de l'évènement A.

- Un sac contient des boules bleues, des boules rouges et des boules jaunes.
  Je tire une boule au hasard et je regarde sa couleur.

  Si la probabilité de tirer une boule bleue est de par exemple $\frac{3}{10}$, alors la probabilité de son évènement contraire « je ne tire pas une boule bleue » est $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

PROBABILITES : Déterminer la probabilité de réalisation d'un évènement

On tire, deux fois de suite et avec remise, une boule dans une urne contenant une boule bleue et deux boules violettes. Détermine la probabilité de tirer successivement deux boules violettes.

On peut dénombrer toutes les issues possibles dans les cases d'un tableau double-entrée :

1er tirage / 2ème tirage	BLEUE	VIOLETTE	VIOLETTE
BLEUE	BLEUE-BLEUE	VIOLETTE-BLEUE	VIOLETTE-BLEUE
VIOLETTE	BLEUE-VIOLETTE	VIOLETTE-VIOLETTE	VIOLETTE-VIOLETTE
VIOLETTE	BLEUE-VIOLETTE	VIOLETTE-VIOLETTE	VIOLETTE-VIOLETTE

On constate qu'il y a 4 issues qui représentent le tirage de 2 boules violettes sur un total de 9 issues.
Il y a donc une probabilité de $\frac{4}{9}$ de tirer successivement 2 boules violettes, soit approximativement « 44,4% de chances ».